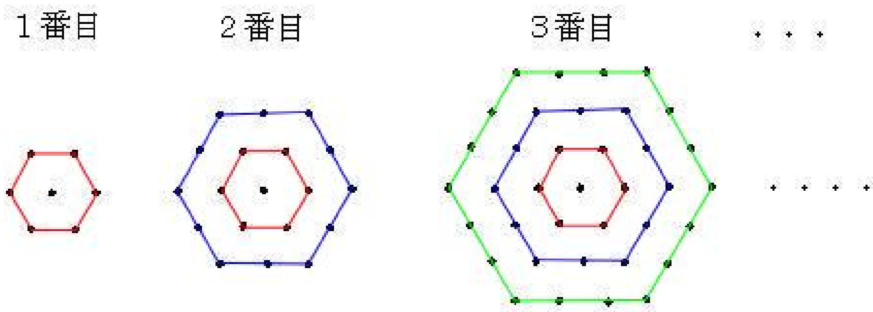
答



点の増えるパターンを上図のように見る。1 番目は、中央の点を囲んで赤の六角形があるが、赤の六角形においては点はその頂点にのみ存在する。2 番目は、1 番目に加えて青の六角形が加わるが、この六角形は頂点と頂点の間に点が 1 個づつ存在する。3 番目は、2 番目に加えて緑の六角形が加わるが、この六角形は頂点と頂点の間に点が 2 個づつ存在する。

n 番目までに並べた点の数を a_n とするとき、上文を数式で記述すると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= 1 + 6(1+0) = 1 + 6 = 7 \\
a_2 &= a_1 + 6(1+1) = 7 + 12 = 19 \\
a_3 &= a_2 + 6(1+2) = 19 + 18 = 37 \\
a_4 &= a_3 + 6(1+3) = 37 + 24 = 61
\end{aligned}
$$

上式は、

$$(\text{点の数}) = (\text{前までの点の数}) + 6\,(\text{頂点} + \text{頂点間の点の数})$$

となっており、以上から、この数列 $\{a_n\}$ に関して以下のように定めることができる。

$$a_1 = 7, \quad a_{n+1} = a_n + 6(1+n) \tag{1}$$

(1) より、a_n は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \qquad (2)\\
&= 7 + \sum_{k=1}^{n-1} \{6\,(1+n)\}\\
&= 7 + 6 \sum_{k=1}^{n-1} (n+1)\\
&= 7 + 6 \left\{ \frac{n\,(n-1)}{2} + (n-1) \right\}\\
&= 7 + 3\,\{n\,(n-1) + 2\,(n-1)\}\\
&= 7 + 3\,(n+2)\,(n-1)\\
&= 3n\,(n+1) + 1 \qquad (3)
\end{aligned}$$

よって、$\{a_n\}$ の第 n 項 a_n は

$$a_n = 3n\,(n+1) + 1 \tag{4}$$

第 99 項は、

$$a_{99} = 3 \times 99 \times 100 + 1 = 29701 \tag{5}$$

となる。

問題文の示す「1 番目から 99 番目までの図に使われた点の個数」というのが、

1. **前の図に書き足すかたちで書く**のに使われた点の個数
2. **各々独立に** 1 **番目から** 99 **番目までの図を書き連ねる**のに使われた点の個数

のいずれなのかが判然としないが、これが 1. であるならば、

答：29701 個

となる。

もし 2. であるならば、求める点の個数は、1 番目から 99 番目までの各々の図の点の総和となる。$\{a_n\}$ の総和を求めると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k) &= \sum_{k=1}^{n}\{3k(k+1)+1\}\\ &= 3\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right)+3\sum_{k=1}^{n}(k)+n\\ &= 3\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}+3\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}+n\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+\frac{3n(n+1)}{2}+n\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\{(2n+1)+3\}+n\\ &= n(n+1)(n+2)+n\\ &= n\{(n+1)(n+2)+1\} \qquad (6)\end{aligned}$$

(6) より、上記 2. の場合の求める点の個数は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{99}(a_k) &= 99\times(100\times101+1)\\ &= 99\times10101=999999 \qquad (7)\end{aligned}$$

(7) より、上記 2. の場合の求める点の個数は、

答：999999 個

となる。